数理解析研究所講究録
387巻 1980年 83-92

H. Cartan's theorem A, B with some structures

都立大・理・　笹倉頌夫

1.　[　]に於いて筆者は'代数性を持つStein多様体'に対しその構造が反映する様な'解析的連接層コホモロジー論'を展開した。その主結果は表題のTh. A, Bの類似である。[4]の議論から我々は自然に之以下に述べる二つの'問題'…漠然とした形であるが…に導かれる。これらの'問題'に関して目下'hyper provisional'な試みを　　　行っている。最初の予定では上記の詳細を書く予定であったが，現在"非常に整理不充分"である…というよりは整理する為の題材自身が備っていない…　ので詳細を書くと却って中途半ぱなものになり混乱を生ずるかも知れない。その様な訳で非常に簡単な形で今後の'希望'を書いておく事にする。(詳細は兎も角書いたのであるが，目下公に出来るものではない。尚すぐ後に述べる'問題'中第二番目の方は一定の段階には比較的早く到達出来てしかるべきと思われる。これらの結果は目下準備中(より正確には'予定中'の)論文[5]に現われるであろう。)

2.　周知の様にTh. A, Bはそれ以前の岡・Cartan等の結果を綜合したものであるが，同時にSerreによる次の結果も見逃す事は出来ない。

Th.C.(Serre) Th.B ⟹ Stein性.

(正確な定式化はH.Cartan seminar 1953〜54を参照されたい。)
Th.C.の証明自身は非常に簡単であるが、所与の多様体のStein性を導く為には、'多様体上のどの様なtypeの連接層に対してTh.B'が成立ば充分であるかが明確である。上記のTh.A〜Cを背景にしながら簡単に筆者が目下試み(very provisional)を行っている事を'日常会話的論法'で記しておく。さて上記Th.A〜Cは所与の多様体Xとその'上部構造'であるCoh(X)=X上の連接層全体の言葉のみで記述されている。他方解析多様体の研究に於いては'解析構造'と共にそれに対する'附加的構造'を考え合せる事は非常に重要である。その事は次の二つの事実を思い出す丈で充分であろう。

$$
(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{主にStein多様体に於ける凸函数(P.S.h)} \\ \text{主に閉多様体に於ける Kähler metric} \end{array} \right\} \text{の基本性.}
$$

(勿論'附加的構造'といったのは表面的な言い方であって、深い関係は周知である。) 我々が[4]で行った議論は'解析多様体の解析構造'のみならず'複素Euclid空間に自然な形'の(1)での附加構造 --- P.g.構造 ... を用いている。尚 Cornalba-Griffiths([2])及びDeligne-Malstionist([1])でも我々の方法と相異なる形で(1)のdataが入ってくる。従って目下の我々の希望は
P.g.構造 ... growth函数とmetric ... を附加した形での連接層—

コホモロジー論を[ ]に於けるものを一般化した形で行いたいと言う訳である。(正確な定式化は[4]及び[5]を参照されたい。) これらについて以下で簡単に述べておこう。

3. まず第一にStein多様体の理論はそれ以前の$\mathbb{C}^n$の<u>領域</u>に関する深い結果をmodelとしている事は周知である。他方代数幾何に於ける最も基本的なStein多様体はAffine多様体であろう。　[1],[2]及び筆者の[4]に於ける議論はAffine多様体をmodelに取っている。$\mathbb{C}^n$内の領域及びAffine多様体は'Stein性'と言う点では一致しているがその個性は互いに相異なるのも一目瞭然である。他方Affine多様体上の'代数的連接層の理論'は単に'Stein性'という性質丈では収まらない多くの事実をも含んでいる。これらの点から我々は次の如き'希望'を持つであろう。

(I)　Stein多様体(少くともその典型的なもの)に対し、その構造が密接に反映する"P.S.構造"(例 growth函数とmetric…)を設定し、その構造を用いれば、Stein多様体の一般論で得られる結果よりも"finer"な結果が得られるであろう。

既に述べたaffine多様体に関する諸結果は、"P.S.構造を用いれば解析的議論<u>のみ</u>を用いて'代数的連接層論'を含む事を示している。亦それらの議論から'finer'が単に'精密化'に留まらない事も期待してよい。(I)に関しては筆者は多変数函数論の知

識が充分とは言えないので、同分野の専門家の人々に'質問'の形で幾つか思いつく事を書いておく。まず(I)に於いては'growth函数'及び'metric'の存在が最初に問題となろう。これに関して、我々はStein多様体が次の二つのタイプの場合には議論の様相がかなり相異なるのではないかと思う。

$$(\mathrm{I})' \quad \text{Stein多様体} = \begin{cases} \text{閉解析多様体} - \text{閉部分解析多様体} \\ \mathbb{C}^n \text{内の有界領域で境界は実解析的かつ凸的.} \end{cases}$$

前者の典型はアフィン多様体であろう。境界は複素解析的である。P.s.h.函数についてはLelong([3])に詳しい議論があるのでそれを参照する。まず Affine多様体では P.s.h.函数は複素函数系 $f_1, \dots, f_s$ より $\Sigma|f_j|^2$ or $\log(\Sigma|f_j|^2)$ の形で組立てられる([1], [2] 及び[4])。具体的な形は[1]〜[4]を参照されたい。他方Lelongによれば p.s.h.は $\mathbb{C}^n$ 内の領域上では'複素函数'から組立てられるp.s.h.のlimitとして得られる。([3], p54)

これらから次の様な'質問'は自然であろう。

質問I. Stein多様体でp.s.h.函数が $\Sigma|f_j|^2$ or $\log(\Sigma|f_j|^2)$ の形に取れるのはいつか？

より詳しくは、Affine多様体の他に Stein多様体で上記の形のp.s.h.となるものはあるか？が最初の質問である。

これらに関しては、(I)'の最初の形でAffine的でないもののp.s.h.を定める事も意味があると思われる。他方(I)'の第二の例

では議論に実解析的又は C^∞ 的要素が大きいのも周知である。

質問II．'(I)'の第二の例では(多くの場合) p.s.h. が質問Iの中の様には取れないであろう？

(尚上記で質問I中の"$\Sigma|f_\nu|^2$ or $\log(\Sigma|f_\nu|^2)$"…等を"本質的に複素解析的に組立てられる"と置換してもよいであろう。)

次に(I)'の第一の例がアフィン多様体である場合には次の事実は容易に確められる。

(I)'' {多様体上の regular 函数(=代数的)} = {境界に対し最少の growth を持つ函数}.

この事から次の様な質問も不自然でないであろう。

質問III．(I)'の第二の例に於いて{境界に対し最少の growth を持つ函数の族}を見出す事は可能か？

恐らく"自然境界"を持つ函数"の内で"特に重要な種属"と言うのはありうるであろう。多様体が等質空間とかその様な場合にはそれらの構造と質問IIIで述べた函数族の間に関係があっても良いであろう。質問IIIは特に重要か否かは解らないが，不自然でないのも事実である。以上は growth 函数に関するものばかりであるが，metric に関しては恐らく"完備な Kähler metric on domains"を議論した Grauert ([ ]) 及びその後の発展とか"小林 metric"等が出発点になるのであろう。これらに関して何か教示があれば幸いである。尚上記では Stein 多様体に

ついてのみ述べた。恐らく一般の閉多様体で必ずしもStein的でないものに関しての"growth函数及び距離函数の設定"が問題となろう。これらに関しては、Andreotti-Grauert([6])が恐らく出発点となろう。亦代数幾何の側からの幾つかの結果(Barth[1]等)も参考にいれるべきであろう。

3'. 以上では最初の Th. A〜C. には触れていないので、これらに簡単に触れておく。まず第一にStein多様体Xに対しgrowth函数f及び距離函数dが設定されたとする。次の仕事はp.g.連接層を定義する事である。

問題1. $Coh(X)_{p.g.} = \{$p.g.連接層全体$\}$ の定義を与えよ。

まず幾つかの例を与える。

例1. Xが Affine多様体ならば、$Coh(X)_{p.g} = Coh(X)_{alg} = \{$代数的連接層全体$\}$ と置く([4], [5])。

例2. Xが[4]に於ける"Affine的"なものの時には、例1の類似で $Coh(X)_{p.g}$ が定義される([5])。

一般的な場合には$Coh(X)_{p.g}$の定義はかなり慎重を要すると思われる。幾つかのcriterionを書いておく。

Criterion 1. (1) $^\forall P \in X$ に対して ideal層 $\mathcal{I}_P \in Coh(X)_{p.g}$.

(2) $Vect(X)_{p.g} = \{ \mathcal{L} =$ vector束 over X で transition matrix の係数が $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)_{p.g}$ から取れる$\} \subset Coh(X)_{p.g}$.

(3) 有限個の函数 $f=(f_1,\dots,f_q) \in \Gamma(X,\mathcal{O}_X)_{p.g}$ の locus $V \subset X$ に対し

イデアル層 $\mathcal{J}_V \subset Coh(X)_{p.g}$.

上記はまず意味のある層を含む事が望ましいので書いた訳である。更に取扱い上からは次の事柄が望ましい。

Criterion 2. $\mathcal{F} \in Coh(X)_{p.g}$ とする。然らば p.g. Zariski 被覆 $\{U_j\}_{j=1}^n$ が存在して、$\mathcal{F}$ は各々の U_j では大域的切断で生成される。(但し U_j は $X - \{f_j=0\}$; $f_j \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)_{p.g}$ の形。)

従って問題1を次の如き形に与えておこう。

問題2. Criterions 1, 2 を満たす $Coh(X)_{p.g}$ の例を与えよ。(より正確にはその様な多様体 X の例を与えよ。)

さて $Coh(X)_{p.g.}$ の定義が出来たとして、p.g. コホモロジー論を論ずる為には 'p.g.-semi norm' を $Coh(X)_{p.g}$ の元に定義せねばならぬ。例1,2 の $Coh(X)_{p.g}$ に対しては、"semi-norm" を定義する事は可能である。([4], [5]: 尚[4]中では k-層を定義したが、これは本質的に semi-normed 層([1]) と本質的にはそれ程は変わらない。) そこに於ける事柄中参考となる事柄を記しておこう。

(イ) $\mathcal{O}_X$ の seminorm '$|\ |$' は普通の絶対値, (ロ) $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_X^n$: 部分層 $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ の semi-norm $|\ |_{\mathcal{F}}$ は inclusion: $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{O}_X^n$ より誘導される。(ハ) $\omega: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$: p.g. 準同型があれば $|\ |_{\mathcal{G}}$ は $|\ |_{\mathcal{F}}$ より誘導される。

これらの事実から $|\ |_{\mathcal{F}}$ は "p.g. 同等"([ ]) を除き一意に定まる。

示 vector 束 $\mathcal{L}$ に対しては、その構造から semi-norm を定めれるが

それらとも一致する([5])。一般の場合には，次の事柄が問題となろう。

問題3. $Coh(\mathfrak{X})_{p.g} \ni {}^{\forall}\mathcal{F}$ に semi-norm を定義せよ。((イ)〜(ハ)が成立せねばならない。)

さて，$Coh(\mathfrak{X})_{p.g}$ に semi-norm が定義されれば p.g. 複体 $C^*(\mathfrak{X}, \mathcal{F})_{p.g}$ … が定義出来る。

問題4. $C^*(\mathfrak{X}, \check{\mathcal{F}})_{p.g}$ に Th. A. B が成立つ様な例を見出せ。

問題5. $C^*(\mathfrak{X}, \check{\mathcal{F}})_{p.g}$ に Th. C. (Serre) が成立つ例を見出せ。

特に(I)′の最初の例 $\mathfrak{X}'$ に戻る。

問題6. "$C^*(\mathfrak{X}, \check{\mathcal{F}})_{p.g}$ に Th. A. B が成立" $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{X}$: affine 多様体 *)

(問題6は "working hypothesis" である。両側の gap はそれ程大きくないと思われる。両右側は次の如く理解されたい。多きこ : $\mathfrak{X} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}'$ (=アフィン多様体) $\subset \mathbb{C}^n$: biholomorphic map で $\mathfrak{X}'$ の'自然な p.g. 構造'をこにより pull back すれば，$\mathfrak{X}$ の p.g. 構造となる。)

上記の事柄は refinements が必要かも知れないが，少なくとも方針は理解して頂けるであろう。又上の如き問題と関連して $\mathfrak{X}$ 自身或はその附加構造の理解が深まる事も期待して良いであろう。

4. 上記は主に Stein 多様体に触れたが，他方 Affine 多様体は，一般の代数多様体の開被覆系をなす。これらの事柄から次の事実に自然に思い到る。

(II) [ ]での Affine 多様体の結果を一般の quasi proj. 多様体に拡張する事。

これに関しては次の事実が成立つ。([5] に詳細は与えられるであろう。)

定理1　X : quasi projective, $\mathcal{F} \in Coh(X)_{alg}$ ならば、次の"GAGA-COMPARISON"が成立つ。

$$☆_1 \qquad H^*(X, \mathcal{F})_{P.g} \cong H^*(X, \mathcal{F})_{alg} .$$

特に X = projective の場合は次の事柄"GAGA-Comparison (Serre)"が成立つ。

$$☆_2 \qquad \begin{tikzcd} H^*(X,\mathcal{F})_{P.g} \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\cong"] & H^*(X,\mathcal{F})_{alg} \arrow[d, phantom, "\cong"] \\ & H^*(X,\mathcal{F})_{an} \end{tikzcd}$$

従って定理1.は GAGA-COMPARISON $(☆)_2$ の拡張形と見做す事が可能であろう。$☆_1$ について簡単に触れておく、

まず第一に：

$(☆_1)'$　$(☆_1)$の左辺は解析的定義に基くものであり、$(☆_1)$は一般の開多様体の連接層論 (P.5.) は"代数的連接層論"を含む事を意味する。

$☆_2$ の基本性は周知である。但し"同型"の本質的意味を理解する事は大程容易でない。　我々は再び"解析及

び代数的連接層論"が1950年代初頭に於ける時代(非常に雰囲気の高い時代)と同様あるいはそれらをscale upした形での統一化が始まりつつある事を理解すれば充分である。我々の側からは極力"解析的方法で代数的連接層の理解"が目標となろう。

問題1. Andreotti–Grauert [6] の P.g. 版を展開せよ。

尚筆者の[4]の結果は"Bilder und Urbilder" [ ] の situation をも含む。[ ] の situation の徹底化が我々の近い将来の主目標となるであろう。

参考文献.

1. Deligne–Maltsiniotis "GAGA Affine" (Astérisque '75)
2. Cornalba–Griffiths

Inv. '74(年代)

3. Lelong Fonctions Plurisousharmoniques et Formes Diff. Positives. (Gordon & BREACH)
4. Sasakura "Cohomology with P.g. & completion theory" (to appear)
5. ——. "A GAGA Comparison in Cohomology with P.g." (in preparation)
6. Andreotti–Grauert. 郡氏の稿を参照されたい。